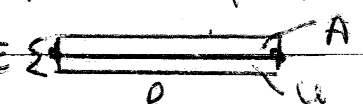
27/03/2017

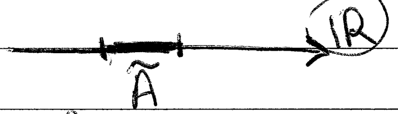
Μάθημα 7ο
Απει 4

Ορισμός: Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ υποσύνολο.

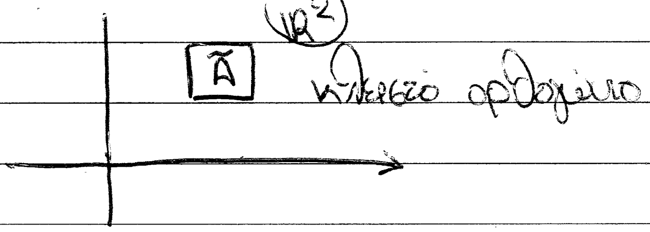
(α) A έχει (n-διάστατο) μηδενικό μέτρο :⟺
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ κλειστά ορθογώνια $U_i \subset \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$, $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$
και $\sum_{i=1}^{\infty} v(U_i) < \varepsilon$

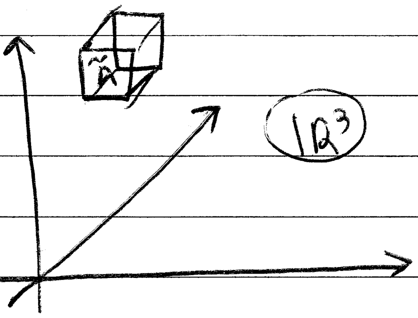
(β) A έχει (n-διάστατο) μηδενικό περιεχόμενο :⟺
τα ίδια με το (α) μόνο που αρκεί πεπερασμένος αριθμός
από κλειστά ορθογώνια.





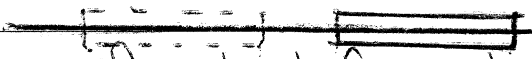
κλειστό ορθογώνιο στο $\mathbb{R}$





Ιδιότητες.

(α) Οι ορισμοί δεν αλλάζουν αν αντί για κλειστά έχουμε ανοιχτά ορθογώνια στο $\mathbb{R}^n$



(β) Κάθε υποσύνολο ενός συνόλου με μηδενικό μέτρο (ή περιεχόμενο) έχει μηδενικό μέτρο (ή περιεχόμενο αντίστοιχα)

(γ) Κάθε πεπερασμένη ένωση συνόλων μηδενικού περιεχομένου έχει μηδενικό περιεχόμενο και κάθε αριθμήσιμη ένωση συνόλων μηδενικού μέτρου έχει μηδενικό μέτρο

(δ) Κάθε σύνολο μηδενικού περιεχομένου έχει μηδενικό μέτρο.

(ε) Κάθε συμπαγές υποσύνολο μηδενικού μέτρου έχει μηδενικό περιεχόμενο.

Υπενθύμιση (βλέπε και Τοπολογία)

$A \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές $:\Longleftrightarrow$

(α) A κλειστό και φραγμένο

(β) $\forall (\bar{x}_\nu) \subset A \ (\exists \bar{x}_{\kappa_\nu}) \subset (\bar{x}_\nu)$ και $\bar{x} \in A : \bar{x}_{\kappa_\nu} \to \bar{x}$ $\Longleftrightarrow$ $\forall (O_i)_{i\in I}$, $O_i \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτά $\bigcup\limits_{i\in I} O_i \supset A : \exists i_1, \dots, i_\kappa \in I :$

$: \bigcup\limits_{i=1}^{\kappa} U_{i_\kappa} \supset A$

(*) $A \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές $\Longleftrightarrow$
Καθε ανοιχτή κάλυψη του A έχει πεπερασμένη υποκάλυψη, δηλ $\forall O_i, i\in I$, μια οικογένεια ανοικτών με $\bigcup\limits_{i\in I} O_i \supset A$

$\exists$ ένας πεπερασμένος αριθμός από αυτά τα O_i, που καλύπτουν το A.

(6T) καθε κλειστό (και καθε ανοιχτό) ορθογώνιο έχει μη μηδενικό περιεχόμενο και μη μηδενικό μέτρο.
(όποια κλειστά ορθογώνια και να πάρουμε, π.χ. τα U_i, θα ισχύει για το κλειστό ορθογώνιο U :
$0 < V(U) \leq \sum V(U_i)$)

(7) Καθε σύνολο μηδενικού περιεχομένου είναι φραγμένο.

Παραδείγματα

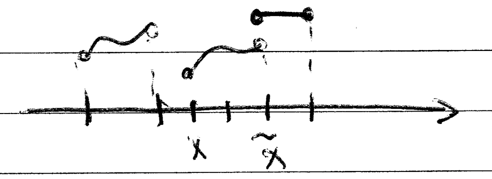
Κάθε υπερεπίπεδο $x_i = c$ ($i=1,\dots,n$, $c\in\mathbb{R}$) του $\mathbb{R}^n$.
$H = \{\bar{x}=(x_1,\dots,x_n)\subset\mathbb{R}^n : x_i = c\}$ έχει μηδενικό μέτρο και κάθε φραγμένο υποσύνολο ενός τέτοιου H έχει μηδενικό περιεχόμενο.

$\Longrightarrow$ Το σύνορο ∂U ενός κλειστού ή ανοιχτού ορθογωνίου U ($U\subset\mathbb{R}^n$) έχει μηδενικό περιεχόμενο. (στον $\mathbb{R}^n$)

Ορισμός

Έστω $B\subset\mathbb{R}^n$ υποσύνολο. Λέμε ότι μια ιδιότητα ισχύει σχεδόν παντού στο B αν ισχύει για κάθε $\bar{x}\in B/A$ όπου A σύνολο μηδενικού μέτρου.

πχ



$A=\{x,\tilde{x}\}$

$$\{x\}\subset\underbrace{\left[x-\frac{\varepsilon}{4}, x+\frac{\varepsilon}{4}\right]}_{\text{κλειστό ορθογώνιο στον } \mathbb{R}}\subset\mathbb{R}\ (=\mathbb{R}^1)$$

με $V\left(\left[x-\varepsilon/4, x+\varepsilon/4\right]\right) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Κριτήριο Ολοκλήρωσης Lebesgue
Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο και $f:A\to\mathbb{R}$ φραγμένη.
Τότε f ολοκληρώσιμη $\Longleftrightarrow$ f συνεχής σχεδόν παντού.

Πόρισμα: Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο και $f:A\to\mathbb{R}$ συνεχής
$\Longrightarrow$ f ολοκληρώσιμη.

Πρόταση

Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο και $f: A \to \mathbb{R}$ μη αρνητική και ολοκληρώσιμη με $f(\bar{x}_0) > 0$ σε ένα σημείο συνέχειας $\bar{x}_0 \in A$

$$\Longrightarrow \int_A f > 0$$

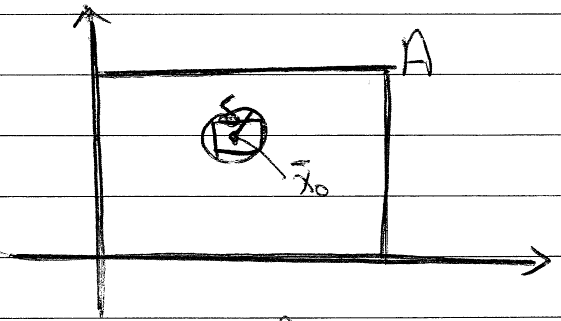
Απόδειξη

Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη $\xrightarrow{\text{κριτήριο Lebesgue}}$

f συνεχής σε ένα $A \setminus B$, $B \subset A$ μηδενικού μέτρου

Αφού η f είναι συνεχής στο $\bar{x}_0$ με $f(\bar{x}_0) > 0$

$$\exists \delta > 0 : \forall \bar{x} \in A \cap B(\bar{x}_0, \delta) : f(\bar{x}) \geq \frac{f(\bar{x}_0)}{2}$$



$\Longrightarrow$ Για το κλειστό ορθογώνιο $S_0 = \left\{ \bar{x} \in A : \|\bar{x} - \bar{x}_0\|_\infty \leq \frac{\delta}{2\sqrt{n}} \right\}$,

$S_0 \subset B(\bar{x}_0, \delta)$, έχουμε:

$$\inf f|_{S_0} \geq \frac{f(\bar{x}_0)}{2} > 0$$

Τότε για κάθε διαμέριση P που έχει το S_0 ως υποορθογώνιο ($S_0 \in S_P$) ισχύει $0 < \inf f|_{S_0} \cdot V(S_0)$

$$\leq \underbrace{\sum_{S \in S_P} \inf f|_S \cdot V(S)}_{=\, L(f,P)} \leq L_f = \int_A f$$